5 МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ, МЕТОД НЬЮТОНА, МЕТОД СЕКУЩИХ

5.1 Метод простых итераций

Заменим уравнение (15) эквивалентным ему уравнением $x=\varphi(x)$. Это можно сделать многими способами, например, положив $\varphi(x) \equiv x+\psi(x)f(x)$, где $\psi(x)$- произвольная непрерывная знакопостоянная функция. Выберем некоторое нулевое приближение x_0 и вычислим дальнейшие приближения по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,2,..... \tag{23}$$

Очевидно, если x_n стремится к некоторому пределу $\bar{x}$, то этот предел есть корень исходного уравнения.

Исследуем условия сходимости. Если $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, тогда

$$x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = (x_n - \bar{x})\varphi'(\xi)\ , \tag{24}$$

где точка ξ лежит между точками x_n и $\bar{x}$. Поэтому если всюду $\varphi'(x) \le q < 1$, то отрезки $|x_n - \bar{x}|$ убывают не медленней членов геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$ и последовательность x_n сходится при любом нулевом приближении. Если $\varphi'(\bar{x}) > 1$, то в силу непрерывности $\varphi'(x) > 1$ и в некоторой, окрестности корня; в этом случае итерации не могут сходиться. Если $\varphi'(\bar{x}) < 1$, но вдали от корня $\varphi'(x) > 1$, то итерации сходятся, если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню; при произвольном нулевом приближении сходимости может не быть. Очевидно, что чем меньше q, тем быстрей сходимость.

5.2 Метод Ньютона

Он называется также методом касательных или методом линеаризации. Если x_n есть некоторое приближение к корню $\bar{x}$, а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то уравнение (15) можно преобразовать следующим образом:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_n + (\bar{x} - x_n)) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n)) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n) f'(\xi)$$

Приближенно заменяя $f'(\xi)$ на значение в известной точке x_n, получим такой итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{25}$$

Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика *y=f(x)* касательной к нему.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, если положить $\varphi(x) = x - [f(x)/f'(x)]$. Тогда $\varphi'(x) = (ff''/f'^2)$. Если $\bar{x}$ есть *p*-кратныйкорень уравнения (1), то вблизи него $f(x) \approx a(x-\bar{x})^p$; отсюда нетрудно получить $\varphi'(\bar{x}) = (p-1)/p$, т. е. $0 \le \varphi'(\bar{x}) < 1$. Для простого корня *p=1* и $\varphi'(\bar{x}) = 0$. Используя результаты предыдущего пункта, можно сформулировать следующие условия сходимости итераций.

Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню, ньютоновские итерациисходятся; скорость сходимости велика для простого корня и соответствует скорости геометрической прогрессии для кратного корня. При произвольном нулевом приближении итерации сходятся, если всюду $|ff''|/(f')^2$, в противном случае сходимость будет не при любом нулевом приближении, а только в некоторой окрестности корня.

Оценим скорость сходимости вблизи простого корня. По определению простых итераций, $\bar{x} - x_n = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_n)$. Разлагая правую часть по формуле Тейлора и учитывая равенство $\varphi'(\bar{x}) = 0$, получим

$$x_n - \bar{x} = \frac{1}{2}(x_{n-1} - \bar{x})^2 \varphi''(\xi), \quad \xi \in (x_{n-1}, \bar{x}), \tag{26}$$

т. е. погрешность очередного приближения примерно равна квадрату погрешности предыдущего приближения. Например, если *(n-1)* –я итерация давала 3 верных знака, то *n*-я даст примерно 6 верных знаков, а *(n+1)*-я - примерно 12 знаков. Это иллюстрирует быструю сходимость вблизи корня. Разумеется, вдали от корня подобные соображения неприменимы.

Пример. Рассмотрим решение уравнения $f(x) \equiv x^2 - a = 0$. Тогда общая формула метода Ньютона принимает вид $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

5.3 Модифицированный метод Ньютона

Следующую формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \tag{27}$$

применяют в том случае, когда хотят избежать многократного вычисления производной $f'(x)$. Метод (26) предъявляет меньше требований к выбору начального приближения x_0 и гарантирует отсутствие деления на 0,

если $f'(x_0) \neq 0$, однако обладает лишь линейной сходимостью, т.е. $x_{n+1} - \bar{x} = O(x_n - \bar{x})$.

5.4 Метод секущих

В методе Ньютона требуется вычислять производную функции, что не всегда удобно. Можно заменить производную первой разделенной разностью, найденной по двум последним итерациям, т. е. заменить касательную секущей.

Получим:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{28}$$

Для начала процесса надо задать x_0 и x_1.

Такие процессы, где для вычисления очередного приближения надо знать два предыдущих, называют двухшаговыми. Эти, казалось бы, небольшие изменения сильно влияют на характер итераций. Скорость сходимости также изменяется. Скорость сходимости можно оценить, разлагая все функции в (28) по формуле Тейлора с центром $\bar{x}$. Получим с точностью до бесконечно малых более высокого порядка:

$$x_{n+1} - \bar{x} = a^{1/\beta} (x_n - \bar{x})^{\beta}, \quad \beta \approx 1{,}62, \quad (1/\beta) \approx 0{,}62 \tag{29}$$

В то время как в методе Ньютона ошибка убывает быстрей (соответствуя $\beta = 2$). Но в методе Ньютона на каждой итерации надо вычислять и функцию, и производную, а в методе секущих - только функцию. Поэтому при одинаковом объеме вычислений в методе секущих можно сделать вдвое больше итераций и получить более высокую точность.

В знаменателе формулы (28) стоит разность значений функции. Вдали от корня это несущественно, но вблизи корня, особенно корня высокой кратности, значения функции малы и очень близки. Возникает потеря значащих цифр, приводящая к «разболтке» счета. Это ограничивает точность, с которой можно найти корень; для простых корней это ограничение невелико, а для кратных может быть существенным. Заметим, что приводить формулу (28) к общему знаменателю не следует: увеличится потеря точности в расчетах. От "разболтки" страхуются так называемым приемом Гарвика. Выбирают не очень малое ε, ведут итерации до выполнения условия $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ и затем продолжают расчет до тех пор, пока $|x_{n+1} - x_n|$ убывают. Первое же возрастание обычно означает начало «разболтки»; тогда расчет прекращают и последнюю итерацию не используют.